



## Inhoud

<b>1</b>	<b>Eenvoudige telproblemen.....</b>	<b>1</b>
1.4	Tellen met verzamelingen.....	1
1.4.1	Verzamelingen .....	1
1.4.2	Voorstellingen van verzamelingen.....	2
1.4.3	Smaakmaker: kaartspel met 52 kaarten .....	2
1.4.4	Bewerkingen met verzamelingen .....	4
1.4.5	Tellen met verzamelingen: voorbeelden .....	6
1.4.6	Uitgewerkt voorbeeld met drie verzamelingen .....	9
1.5	Tellen met boomdiagrammen .....	11
1.5.1	Smaakmaker: de verkleedpartij .....	11
1.5.2	Voorbeeld 1: tombola .....	11
1.5.3	Voorbeeld 2: keuze van een automodel .....	12
1.5.4	Boomdiagram met drie niveaus.....	13
1.6	Wegendiagrammen .....	14
1.7	Oefeningen telproblemen .....	15
<b>2</b>	<b>Combinatieleer (uitgebreid).....</b>	<b>16</b>
2.1	Formules voor variaties, permutaties en combinaties .....	16
2.1.1	Variaties van k elementen uit n .....	16
2.1.2	Permutatie van n elementen uit n .....	18
2.1.3	Combinaties van k uit n.....	19
2.1.4	Opstellen van de formule.....	20
2.1.5	Berekening met GeoGebra .....	21
2.1.6	Routes van P naar Q.....	22
2.2	Herhalingsvariaties .....	22
2.3	Herhalingscombinaties (uitbreidingsleerstof) .....	23
2.4	Herhalingspermutaties (uitbreidingsleerstof) .....	25
2.5	ROUTES van P naar Q.....	28
2.5.1	Regelmatig rooster.....	28
2.5.2	Onregelmatig rooster.....	29
2.6	Oefeningen combinatieleer .....	30
<b>3</b>	<b>Binomium van NEWTON.....</b>	<b>31</b>
3.1	De driehoek van Pascal .....	31
3.1.1	Inleidend voorbeeld: aantal routes vanuit P.....	31
3.1.2	Een vleugje geschiedenis .....	34
3.2	Vormingswet driehoek van Pascal: formules Stifel-Pascal .....	35
3.3	Eigenschappen van de driehoek van Pascal .....	36
3.4	Binomium van Newton .....	37
3.4.1	Inleiding: merkwaardige producten.....	37
3.4.2	Formulering van het binomium van Newton en de driehoek van Pascal .....	38
3.5	Veralgemening van het binomium van Newton.....	39
3.5.1	Eigenschap: machten van 2.....	40
3.6	Bewijs binomium van Newton(met inductie) .....	40





3.7	Oefeningen binomium van Newton .....	42
<b>4</b>	<b>Kansrekening .....</b>	<b>43</b>
4.1	Het begrip kans .....	43
4.1.1	Inleiding.....	43
4.2	Theoretische kans berekenen met de wet van Laplace .....	44
4.2.1	De productregel en de somregel voor het berekenen van kansen ...	46
4.2.2	De complementregel voor het berekenen van kansen <b>(NIET)</b> .....	48
4.2.3	Kans op een verschil van twee gebeurtenissen .....	48
4.2.4	Correct gebruik van de formules van Laplace bij het berekenen van kansen 49	
4.3	Experimentele kans.....	50
4.3.1	Draaien aan het kleurenrad .....	50
4.3.2	Simulatie van een kansexperiment met GeoGebra .....	51
4.4	Wet van de grote getallen .....	53
4.5	Samengestelde experimenten en kansbomen .....	55
4.5.1	Tellen van de mogelijkheden met een boomdiagram .....	55
4.5.2	Vereenvoudigde boomdiagrammen .....	56
4.5.3	Kansbomen .....	58
4.6	Kruistabel en voorwaardelijke kans.....	61
4.6.1	Inleidende voorbeeld .....	61
4.6.2	Formules voor voorwaardelijke kans .....	62
4.6.3	Kruistabel en voorwaardelijke kans .....	62
4.6.4	Rood/Blauw Vierkant/driehoek .....	64
4.6.5	Uitgewerkt interactief voorbeeld .....	65
4.7	Regel van Bayes (veralgemening) .....	66
4.7.1	Opstellen van de formules.....	66
4.7.2	Voorbeeld 1: kans op regen .....	67
4.8	Kansberekening met formules combinatieleer .....	68
4.8.1	Herhaling van de formules: variaties, permutaties, combinaties.....	68
4.8.2	Uitgewerkte voorbeelden .....	69
4.9	Verskillende oplossingsmethoden voor éénzelfde probleem .....	71
4.9.1	Methode 1: met kansbomen .....	71
4.9.2	Methode 2: met formules combinatieleer .....	72
4.10	Oefeningen kansberekening.....	74
<b>5</b>	<b>Binomiale kansverdeling.....</b>	<b>75</b>
5.1	Eenvoudige kansverdelingen .....	75
5.1.1	Bernoulli kansverdeling (discreet) .....	75
5.1.2	Uniforme verdeling (discreet).....	75
5.2	Binomiale kansverdeling.....	76
5.2.1	Bernoulli kansexperiment: gooien met een eerlijke dobbelsteen.....	76
5.2.2	Een tweede voorbeeld: kleurenblindheid.....	78
5.2.3	De algemene formule.....	81
5.2.4	Handige tips .....	81
5.3	Berekening van binomiale kansen met GeoGebra .....	82
5.3.1	Voorbeeld.....	82
5.3.2	Stap voor stap berekeningen met GeoGebra .....	82
5.3.3	Veralgemening van de berekening voor n, p en k met schuifknoppen.	83





5.3.4	Het commando BinomialeVerdeling( , , , ).....	85
5.3.5	Binomiale kansen berekenen met GeoGebra commando's .....	85
5.3.6	De aparte GeoGebra app "Waarschijnlijkheidsrekenen" .....	87
5.4	EXTRA VOORBEELDEN.....	90
5.5	Bord van Galton .....	91
<b>6</b>	<b>De normale verdeling .....</b>	<b>94</b>
6.1	Inleidend voorbeeld: lengte van 200 snoeken .....	94
6.1.1	Absolute frequenties en histogram bij een verdeling in 5 klassen. ...	94
6.1.2	Absolute frequenties en histogram bij een verdeling in 25 klassen ..	96
6.1.3	Frequentiedichtheid en dichtheidshistogram.....	97
6.1.4	De normale kromme als wiskundig model voor een verdeling .....	98
6.1.5	Een vleugje geschiedenis .....	100
6.2	De normale kromme van Gauss.....	101
6.2.1	Van dichtheidshistogram naar de normale kromme van Gauss.....	101
6.2.2	Functievoorschrift van de normale kromme van Gauss .....	102
6.3	De normale kromme van Gauss tekenen met GeoGebra.....	103
6.3.1	Het commando normaal( $\mu$ , $\sigma$ , $x$ , ...) .....	103
6.3.2	Bijzondere punten van de normale kromme .....	104
6.4	Kenmerken van de normale verdeling.....	105
6.4.1	De standaardnormale verdeling met $\mu = 1$ en $\sigma = 0$ .....	105
6.4.2	De 68 - 95 -99,7 - regel.....	106
6.4.3	De meetkundige kenmerken van deze normale verdeling .....	108
6.4.4	IQ: toepassing van de 68 – 95 -99,7 – regel .....	108
6.5	Grafische betekenis van de parameters $\mu$ en $\sigma$ .....	109
6.5.1	Betekenis van $\mu$ .....	109
6.5.2	Betekenis van $\sigma$ .....	110
6.6	De Z-score .....	111
6.7	Standaardisering van de normale kromme .....	113
6.7.1	Omvormen van normale verdeling naar de standaardnormale verdeling 113	
6.7.2	Tabel gestandaardiseerde waarden... Hoe het vroeger was! .....	114
6.8	GeoGebra commando's voor kansverdelingen .....	115
6.9	Onderzoeksvenster waarschijnlijkheidsrekening .....	116
6.9.1	Tekenen van de normale verdeling (Gausskromme) .....	117
6.9.2	Een kans berekenen bij gegeven waarden .....	117
6.9.3	Omgekeerd probleem; waarden bepalen bij een gegeven kans. ....	118
6.9.4	Bepalen van gemiddelde $\mu$ of standaardafwijking $\sigma$ .....	119
6.10	Binomiale verdeling benaderen door normale verdeling.....	121
6.11	Oefeningen normale verdeling .....	122
<b>7</b>	<b>Betrouwbaarheidsintervallen .....</b>	<b>124</b>
7.1	Conclusies trekken uit steekproeven.....	124
7.1.1	Aselecte en representatieve steekproeven .....	124
7.1.2	Steekproefvariabiliteit.....	125
7.1.3	Conclusies trekken uit steekproeven .....	126
7.2	Verdeling van het steekproevengemiddelde.....	126
7.3	Simulatie van steekproeven met GeoGebra.....	130
7.3.1	Simuleren van één enkele steekproef .....	130





7.3.2	Simuleren van meerdere steekproeven en steekproefgemiddelde	131
7.4	Betrouwbaarheidsintervallen voor het gemiddelde.....	132
7.4.1	De Z-score .....	132
7.4.2	Betrouwbaarheidsniveau .....	133
7.4.3	Formules voor het betrouwbaarheidsinterval voor het gemiddelde	134
7.4.4	Eigenschappen van de betrouwbaarheidsintervallen voor het populatiegemiddelde .....	135
7.4.5	Correcte interpretatie van de betekenis van een betrouwbaarheidsinterval	136
7.4.6	Uitgewerkte voorbeelden voor betrouwbaarheidsinterval van gemiddelde	138
7.4.7	Betrouwbaarheidsintervallen voor populatiegemiddelde berekenen met GeoGebra .....	139
7.5	Steekproefverdeling voor de steekproefproporties .....	140
7.6	Betrouwbaarheidsintervallen voor de populatieproportie p .....	143
7.6.1	Visualisatie van de betrouwbaarheidsintervallen met GeoGebra...	143
7.6.2	Formules betrouwbaarheidsintervallen voor de populatieproportie p	144
7.6.3	Eigenschappen van het betrouwbaarheidsinterval BI voor populatieproportie.....	144
7.6.4	Uitgewerkte voorbeeld betrouwbaarheidsinterval voor populatieproportie	145
7.6.5	Berekening van een betrouwbaarheidsinterval voor de populatieproportie met GeoGebra.....	146
7.7	Oefeningen betrouwbaarheidsintervallen .....	147
<b>8</b>	<b>Toetsen van hypothesen.....</b>	<b>150</b>
8.4	Nulhypothese en alternatieve hypothese .....	150
8.4.1	Formuleren van hypothesen.....	150
8.4.2	Fouten van type 1 en type 2 .....	150
8.4.3	Analoog voorbeeld in de rechtspraak.....	151
8.4.4	Significantieniveau (drempelwaarde) alfa .....	151
8.4.5	Wat is statistische significantie? .....	151
8.4.6	De p-waarde (overschrijdingskans).....	152
8.5	Toetsen van hypothesen voor gemiddelde met bekende $\sigma$ .....	153
8.5.1	Voorbeeld 1: rechts eenzijdige hypothesetoets .....	153
8.5.2	Voorbeeld 2: links eenzijdige hypothesetoets.....	157
8.6	Toetsen van hypothesen voor de populatieproportie p.....	159
8.7	Oefeningen Toetsen van hypothesen.....	163

